



TITLE:

時間帯割引を考慮したサービス業の最適開閉店時刻 (不確実な状況における意思決定の理論と応用)

AUTHOR(S):

三道, 弘明

CITATION:

三道, 弘明. 時間帯割引を考慮したサービス業の最適開閉店時刻 (不確実な状況における意思決定の理論と応用). 数理解析研究所講究録 2008, 1589: 27-36

ISSUE DATE:

2008-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81589>

RIGHT:

時間帯割引を考慮したサービス業の最適開閉店時刻

大阪大学大学院・経済学研究科 三道 弘明 (Hiroaki Sandoh)
Graduate School of Economics,
Osaka University

1. まえがき

時間帯割引は、小売業にとってより多くの顧客を確保するための有効な手段であり、日常生活においてもあちらこちらに見受けられる。サービス業においても、取り扱うサービス財によっては同様の試みがなされている。これらの活動は収益管理 [1] の一貫として捉えることができ、収益管理は「マネー経済」と言われる今日、収益性の向上が重要視される企業において非常に重要な役割を果たすと考えられている。

このような観点から本研究では、サービス財を日々販売するサービス業を念頭において、開店直後及び閉店直後に一定の割引時間帯を設定する場合の、最適開店、閉店時刻について考察する。ここでは、Shy and Stenbacka[2] の提案したサービス財に対する需要分布を適用し、これに割引時間帯を加味した場合の消費者の反応について検討することで、開店、閉店時刻に関する均衡について論じることとする。

使用する記号は以下のとおりである。

U_t	理想のサービス時刻が t である顧客の効用
u_0	消費者のサービスに対する固有の WTP (Willingness To Pay; 便益)
p	サービスの通常料金
α	$(1 - \alpha)$ は割引率 ($0 \leq \alpha \leq 1$)
q_t	理想のサービス時刻が t である需要
β	価格割引による需要の増加分 ($0 \leq \beta \leq 1$)
t_o	開店 (サービス開始) 時刻
t_c	閉店 (サービス終了) 時刻
n	通常価格 p を許容する消費者の人口
μ	需要分布の一様性の度合い
τ	料金割引時間
c_1	消費者一人当たりのサービス提供費用 (限界費用)
c_2	単位時間当たり営業費用 (開店中にかかる費用)

2. 需要分布

2.1 Shy and Stenbacka の需要分布

Shy and Stenbacka[2] は, Hotelling[3] の数直線を円環に置き換え, さらに距離の概念をサービスを受ける理想時刻と解釈し直したものを, 財に対する需要分布の一つとして提案した. それは, 時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) をサービスに対する理想時刻とする需要量を q_t とすると

$$q_t = \begin{cases} n[\mu + 4(1 - \mu)t], & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ n[4 - 3\mu - 4(1 - \mu)t], & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

で与えるものである. なお図 1 に示すように, 上の需要分布は $\mu = 1$ のときに一様分布であり, $\mu < 1$ のときには三角分布である.

またトータルでの顧客数は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} q_t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 q_t dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} q_t dt = n \quad (2)$$

である.

本研究においては, この需要分布を Shy and Stenbacka のように円環に置き換えることなく, $[0, 1]$ の数直線のまま使用するが, その理由は後に明らかとなる.

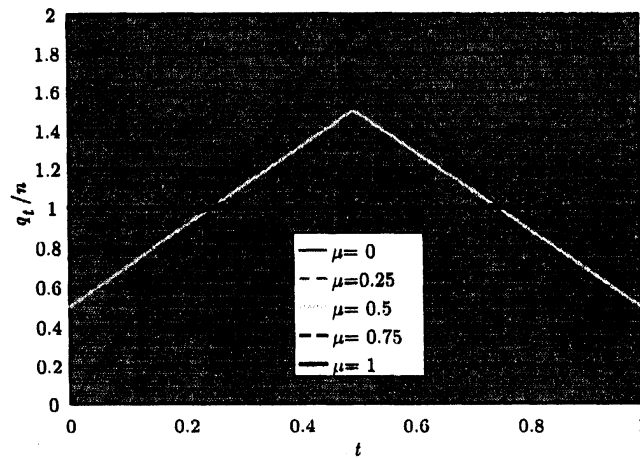


図 1: 需要分布

2.2 価格弾力性

理想時刻が t であるとき, 価格が p から $p_\alpha = \alpha p$ ($\alpha \leq 1$) に変化すると需要量が $r_t = (\beta + 1)q_t$ ($\beta \geq 0$) に変化する場合を考える. 以下では, 割引を行わない場合の需要分布 q_t を構成する消費者を消

費者 A, 割引が実施された場合の需要の増加分に対応する分布 βq_t を構成する消費者を消費者 B と呼ぶこととする.

また

$$\frac{\frac{\beta q_t}{q_t}}{\frac{(\alpha-1)p}{p}} = \frac{\beta}{\alpha-1} \quad (3)$$

より, 需要の価格弾力性は

$$\eta = -\frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

である. よって $\beta > 1-\alpha$ ならば, 需要は価格弾力的であり, $\beta = 1-\alpha$ ならば, 単位弾力的, さらに $\beta < 1-\alpha$ ならば, 需要は価格に対して非弾力的であることとなる.

3. 最適反応

需要分布が左右対象であるので, 開店時刻 t_o と閉店時刻 t_c は $t = \frac{1}{2}$ を中心に左右対象となる. よって, 開店時刻が求まれば閉店時刻は

$$t_c = 1 - t_o \quad (4)$$

により求めることができる. したがって以下では, 時間区間 $[0, \frac{1}{2})$ に注目し, t_o のみについて議論する.

記号を次のように定義する.

$$t_o^{(1a)} = t_o - \frac{u_0 - \alpha p}{\omega} \quad (5)$$

$$t_o^{(1b)} = t_o - \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \quad (6)$$

$$t_o^{(2)} = t_o + \tau + \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \quad (7)$$

3.1 消費者の最適反応

3.1.1 消費者 A

価格割引を導入したとき, 理想時刻が t であるような消費者 A の最適反応は次のとおりである.

- (1) $t \in (0, t_o^{(1a)})$ のとき, 消費者 A は開店時刻まで待つことをしない. つまりサービス財を購入しないこととなり, $U_t = 0$ である.
- (2) $t \in (t_o^{(1a)}, t_o]$ である場合, 消費者 A は開店時刻まで待つことで割引価格の下でサービス財を購入する. このとき $U_t = u_0 - \alpha p - \omega(t_o - t)$ である.

- (3) $t \in (t_0, t_0 + \tau]$ であるような消費者 A は、理想時刻 t で財を購入することとなり、 $U_t = u_0 - \alpha p$ である。
- (4) $t \in (t_0 + \tau, t_0^{(2)})$ のときには、消費者 A は時間を早めて割引き時間帯に財を購入する。なおそのときの効用は $U_t = u_0 - \alpha p - \omega[t - (t_0 + \tau)]$ である。
- (5) $t \in (t_0^{(2)}, \frac{1}{2}]$ を満たすときには、消費者 A は理想時刻に通常価格で財を購入する。よって $U_t = u_0 - p$ である。

3.1.2 消費者 B

価格割引を行うと需要分布そのものが、 q_t から $r_t = (\beta + 1)q_t$ に変化し、任意の時刻における需要量は大きくなる。こうした需要の増加を表す消費者 B の最適反応は次のようになる。但し、理想時刻にサービスを受ける消費者 B が、価格割引によって得る効用は $u_0 - \alpha p$ ではなく、 $(1 - \alpha)p$ であることに注意を要する。

- (1) $t \in (0, t_0^{(1b)})$ のとき、消費者 B は開店時刻まで待つことをしない。つまりサービス財を購入しないこととなり、 $U_t = 0$ である。
- (2) $t \in (t_0^{(1b)}, t_0]$ である場合、消費者 B は開店時刻まで待つことで割引価格の下で財を購入する。このとき $U_t = (1 - \alpha)p - \omega(t_0 - t)$ である。
- (3) $t \in (t_0, t_0 + \tau]$ であるような消費者 B は、理想時刻 t で財を購入することとなり、 $U_t = (1 - \alpha)p$ である。
- (4) $t \in (t_0 + \tau, t_0^{(2)})$ のときには、消費者 B は時間を早めて割引き時間帯に財を購入する。なおそのときの効用は $U_t = (1 - \alpha)p - \omega[t - (t_0 + \tau)]$ である。
- (5) $t \in (t_0^{(2)}, \frac{1}{2}]$ を満たすときには、消費者 B は財を購入しない。よって、 $U_t = 0$ である。

3.2 t_0 の定義域

理想時刻が $t < 0$ であるような消費者 A が $t_0 > 0$ なる開店時刻まで待つてサービス財を購入することがないようにするため

$$t_0^{(1)} = t_0 - \frac{u_0 - \alpha p}{\omega} \geq 0 \quad (8)$$

を仮定する。したがって、開店時刻 t_0 の定義域として

$$t_0 \geq \frac{u_0 - \alpha p}{\omega} \quad (9)$$

を設けたこととなる。

また同様に、理想時刻が $t > \frac{1}{2}$ であるような消費者が $[t_o, t_o + \tau]$ なる割引時間帯にまで時間を繰り上げて財を購入することがないようにするために、かつまた理想時刻がピーク時であるような消費者にが価格割引を利用させないためにも

$$t_o^{(2)} = t_o + \tau + \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \leq \frac{1}{2} \quad (10)$$

なる仮定を追加する。よって、開店時刻 t_o のさらなる定義域として

$$t_o \leq \frac{1}{2} - \tau - \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \quad (11)$$

をも設定したこととなる。上の議論は同時に

$$\begin{aligned} \frac{u_0 - \alpha p}{\omega} \leq \frac{1}{2} - \tau - \frac{(1-\alpha)p}{\omega} &\iff \tau + \frac{u_0 + (1-2\alpha)p}{\omega} \leq \frac{1}{2} \\ &\iff \omega \geq \frac{2[u_0 + (1-2\alpha)p]}{1-2\tau} \end{aligned} \quad (12)$$

を仮定したことになり、 t_o の定義域として

$$\frac{u_0 - \alpha p}{\omega} \leq t_o \leq \frac{1}{2} - \tau - \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \quad (13)$$

を考えることを意味している。

なお、需要分布として Shy and Stenbacka のような円環ではなく、 $[0, 1]$ の数直線を考えるのは、上のような定義域を設定したことがその理由である。

4. サービスプロバイダの利益

4.1 割引価格でサービス財を購入する消費者数

割引価格でサービス財を購入する消費者 A の数を $Q_{1A}(t_o)$ と表すとき、需要分布の対象性を利用すると

$$\begin{aligned} Q_{1A}(t_o) &= 2 \int_{t_o^{(1a)}}^{t_o^{(2)}} q_t dt \\ &= 2n \left[\tau + \frac{u_0 + (1-2\alpha)p}{\omega} \right] \left[\mu + 2(1-\mu) \left(2t_o + \tau - \frac{u_0 - p}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

のようになる。

一方、割引価格でサービス財を購入する消費者 B の数を $Q_{1B}(t_o)$ と表すと

$$\begin{aligned} Q_{1B}(t_o) &= 2 \int_{t_o^{(1b)}}^{t_o^{(2)}} \beta q_t \\ &= 2n\beta\mu \left[\tau + \frac{2(1-\alpha)p}{\omega} \right] + 4n\beta(1-\mu) \left[\tau + \frac{2(1-\alpha)p}{\omega} \right] (2t_o + \tau) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

4.2 通常価格でサービス財を購入する消費者数

通常価格でサービス財を購入する消費者は消費者Aのみであり、その数は

$$\begin{aligned} Q_2(t_o) &= 2 \int_{t_o^{(2)}}^{\frac{1}{2}} q_t dt \\ &= 2n \left[\frac{1}{2} - t_o - \tau - \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \right] \left\{ \mu + 2(1-\mu) \left[\frac{1}{2} + t_o + \tau + \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \right] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

である。

4.3 利益

需要がピークのときに、サービスプロバイダの利益が正であるためには

$$n(2-\mu)(p-c_1) > c_2 \quad (17)$$

でなければならない。また、オフピークのときにサービスプロバイダの利益が負であるためには

$$c_2 > n\mu(p-c_1) \quad (18)$$

でなければならない。

このとき、サービス・プロバイダーの利益は

$$\Pi(t_o) = (\alpha p - c_1) [Q_{1A}(t_o) + Q_{1B}(t_o)] + (p - c_1) Q_2(t_o) - c_2(1 - 2t_o) \quad (19)$$

で与えられる。但し

$$c_1 < \alpha p \leq p \iff \frac{c_1}{p} < \alpha \leq 1$$

を仮定する。

5. プロバイダーの最適戦略

5.1 最適戦略

プロバイダーの利益 $\Pi(t_o)$ を t_o で微分した結果を $\pi(t_o)$ とおく。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt_o} &= (\alpha p - c_1) \left[\frac{dQ_{1A}(t_o)}{dt_o} + \frac{dQ_{1B}(t_o)}{dt_o} \right] + (p - c_1) \frac{dQ_2(t_o)}{dt_o} + 2c_2 \\ &\equiv \pi(t_o) \end{aligned} \quad (20)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \pi(t_o) &= 8n(1-\mu)(\alpha p - c_1) \left\{ \tau + \frac{u_0 + (1-2\alpha)p}{\omega} + \beta \left[\tau + \frac{2(1-\alpha)p}{\omega} \right] \right\} \\ &\quad - 8n(1-\mu)(p - c_1) \left[t_o + \tau + \frac{(1-\alpha)p}{\omega} \right] - 2n\mu(p - c_1) + 2c_2 \end{aligned} \quad (21)$$

である。よって、 $\pi(t_o)$ は t_o に関して単調減少であり、 t_o の定義域の下限において

$$\begin{aligned}\pi\left(\frac{u_0 - \alpha p}{\omega}\right) &= -8n(1-\mu)(1-\alpha)p\left[\tau + \frac{u_0 + (1-2\alpha)p}{\omega}\right] \\ &\quad + 8n\beta(1-\mu)(\alpha p - c_1)\left[\tau + \frac{u_0 + 2(1-\alpha)p}{\omega}\right] \\ &\quad - 2n\mu(p - c_1) + 2c_2\end{aligned}\quad (22)$$

である。

また上限では

$$\begin{aligned}\pi\left(\frac{1}{2} - \tau - \frac{(1-\alpha)p}{\omega}\right) &= 8n(1-\mu)(\alpha p - c_1)\left\{(\beta+1)\left[\tau + \frac{2(1-\alpha)p}{\omega}\right] + \frac{u_0 - p}{\omega}\right\} \\ &\quad - 4n(1-\mu)(p - c_1) - 2n\mu(p - c_1) + 2c_2\end{aligned}\quad (23)$$

である。

以上の結果、最適開店時刻は以下のような場合分けの下で議論される。

$$(1) \quad -4n(1-\mu)(1-\alpha)p\left[\tau + \frac{u_0 + (1-2\alpha)p}{\omega}\right] + 4n\beta(1-\mu)(\alpha p - c_1)\left[\tau + \frac{u_0 + 2(1-\alpha)p}{\omega}\right] - n\mu(p - c_1) + c_2 > 0$$

この場合、さらに次のように場合分けされる。

$$i) \quad 4n(1-\mu)(\alpha p - c_1)\left\{(\beta+1)\left[\tau + \frac{2(1-\alpha)p}{\omega}\right] + \frac{u_0 - p}{\omega}\right\} - 2n(1-\mu)(p - c_1) - n\mu(p - c_1) + c_2 \geq 0$$

このとき、プロバイダーの利益を最大にするという意味での最適開店時刻は

$$t_o^* = \frac{1}{2} - \tau - \frac{(1-\alpha)p}{\omega}\quad (24)$$

である。

$$ii) \quad 4n(1-\mu)(\alpha p - c_1)\left\{(\beta+1)\left[\tau + \frac{2(1-\alpha)p}{\omega}\right] + \frac{u_0 - p}{\omega}\right\} - 2n(1-\mu)(p - c_1) - n\mu(p - c_1) + c_2 < 0$$

このとき

$$\begin{aligned}t_o^* &= \frac{\alpha p - c_1}{p - c_1}\left\{\tau + \frac{u_0 + (1-2\alpha)p}{\omega} + \beta\left[\tau + \frac{2(1-\alpha)p}{\omega}\right]\right\} \\ &\quad - \frac{\mu}{4(1-\mu)} + \frac{c_2}{4n(1-\mu)(p - c_1)} - \tau - \frac{(1-\alpha)p}{\omega}\end{aligned}\quad (25)$$

である。

$$(2) \quad -4n(1-\mu)(1-\alpha)p\left[\tau + \frac{u_0 + (1-2\alpha)p}{\omega}\right] + 4n\beta(1-\mu)(\alpha p - c_1)\left[\tau + \frac{u_0 + 2(1-\alpha)p}{\omega}\right] - n\mu(p - c_1) + c_2 \leq 0$$

この場合、 $\pi(t_o) \leq 0$ であり

$$t_o^* = \frac{u_0 - \alpha p}{\omega}\quad (26)$$

5.2 割引の効果

ここでは、割引の導入効果について考察する。

割引の導入が有効であるための必要十分条件の導出には相当な困難を伴うが、十分条件に関しては、次のような命題が得られる。

命題 1

$$u_0 - p \leq (1 - \alpha)p \quad \text{and} \quad \beta(\alpha p - c_1) > (1 - \alpha)p \quad (27)$$

ならば、プロバイダーは割引の導入によって利益を増加することができる。

[証明] Appendix A.1 参照。

また次のような命題も得られる。

命題 2

$$\beta(\alpha p - c_1) > (1 - \alpha)p \quad (28)$$

ならば最適開店時刻は、定義域の下限よりも大きい。すなわち

$$t_o^* > \frac{u_0 - \alpha p}{\omega} \quad (29)$$

を満たす。

[証明] Appendix A.2 参照

6. むすび

本研究では収益管理の一貫として、サービスプロバイダに対して、開店直後、閉店直前の一定の時間割引を導入することを考え、最適開店、閉店時刻を求めるための数理モデルを構築した。ここでは、Shy and Stenbacka の提案した需要分布に基づき、最適解の存在条件を明らかにするとともに、割引によってプロバイダの利益が増加するための条件についても考察した。

時間帯割引は、単に需要量を増やすことで利益を増加させるだけが目的ではない。時間帯割引によってピーク時の需要が割り引き時間帯に移動させることで、需要分布を時間に関して平滑化し、それによってピーク時の負荷軽減や機会損失の解消を意図することも少なくない。このような意図を考慮した数理モデルの構築については今後の課題とする。

なお、本研究の一部は科学研究費補助金（課題番号：18510140）の助成を受けて行われたことを記して、感謝の意を表する。

参考文献

- [1] Talluri, K. T. and van Ryzin, G. J. : The Theory and Practice of Revenue Management, Springer, New York (2004).
- [2] Shy, Oz and Stenbacka, Rune : Service hours with asymmetric distributions of ideal service time, *International Journal of Industrial Organization*, vol. 24, pp. 763-771 (2006).
- [3] Hotelling, H. : Stability in copetition, *Economic Journal*, vol. 39, pp. 41-57 (1929).

A. Appendix

A.1 命題1の証明

理想時刻 t が

$$t_o - \frac{u_0 - p}{\omega} \leq t \leq t_o + \tau + \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}$$

を満たすような消費者 A は、割引がなければ通常価格でサービス財を購入する。よって、割引を行うことで得られる利益は

$$\Pi_1 = (1 - \alpha)p \int_{t_o - \frac{u_0 - p}{\omega}}^{t_o + \tau + \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}} q_t dt \quad (A1)$$

だけ目減りする。

しかし割引が導入されると、理想時刻 t が

$$t_o - \frac{u_0 - \alpha p}{\omega} \leq t < t_o - \frac{u_0 - p}{\omega}$$

を満足する消費者 A が、割引価格でサービス財を購入する。よって

$$\Pi_2 = (\alpha p - c_1) \int_{t_o - \frac{u_0 - \alpha p}{\omega}}^{t_o - \frac{u_0 - p}{\omega}} q_t dt \quad (A2)$$

なる量だけ利益が増加する。

一方、需要が価格弾力的であると、理想時刻 t が

$$t_o - \frac{(1 - \alpha)p}{\omega} < t < t_o + \tau + \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}$$

を満足するような消費者 B が割引価格でサービス財を購入することから

$$\Pi_3 = (\alpha p - c_1) \int_{t_o - \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}}^{t_o + \tau + \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}} \beta q_t dt \quad (A3)$$

なる大きさの利益が消費者 B から得られる。

ここで $u_0 - p \leq (1 - \alpha)p$ が成り立つとして以上を差し引きすると

$$\begin{aligned}
\Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_1 &= [\beta(\alpha p - c_1) - (1 - \alpha)p] \int_{t_0 - \frac{u_0 - p}{\omega}}^{t_0 + \tau + \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}} q_t dt + \beta(\alpha p - c_1) \int_{t_0 - \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}}^{t_0 - \frac{u_0 - p}{\omega}} q_t dt \\
&\quad + (\alpha p - c_1) \int_{t_0 - \frac{u_0 - \alpha p}{\omega}}^{t_0 - \frac{u_0 - p}{\omega}} q_t dt \\
&= [\beta(\alpha p - c_1) - (1 - \alpha)p] \int_{t_0 - \frac{u_0 - p}{\omega}}^{t_0 + \tau + \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}} q_t dt \\
&\quad + (\alpha p - c_1) \left[\beta \int_{t_0 - \frac{(1 - \alpha)p}{\omega}}^{t_0 - \frac{u_0 - p}{\omega}} q_t dt + \int_{t_0 - \frac{u_0 - \alpha p}{\omega}}^{t_0 - \frac{u_0 - p}{\omega}} q_t dt \right] \tag{A4}
\end{aligned}$$

が得られる。

よって $u_0 - p \leq (1 - \alpha)p$ かつ $\beta(\alpha p - c_1) > (1 - \alpha)p$ ならば $\Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_1 > 0$ が成り立ち、利益は増加する。

A.2 命題2の証明

$\beta(\alpha p - c_1) > (1 - \alpha)p$ のとき、式 (22) は

$$\begin{aligned}
\pi\left(\frac{u_0 - \alpha p}{\omega}\right) &= -8n(1 - \mu)(1 - \alpha)p \left[\tau + \frac{u_0 + (1 - 2\alpha)p}{\omega} \right] \\
&\quad + 8n\beta(1 - \mu)(\alpha p - c_1) \left[\tau + \frac{u_0 + 2(1 - \alpha)p}{\omega} \right] - 2n\mu(p - c_1) + 2c_2 \\
&> 8n(1 - \mu)[\beta(\alpha p - c_1) - (1 - \alpha)p] \left[\tau + \frac{u_0 + (1 - 2\alpha)p}{\omega} \right] - 2n\mu(p - c_1) + 2c_2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

を満たし、命題2が言える。